ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

ETABLISSEMENT RECONNU PAR L'ETAT - DIPLOME HOMOLOGUE PAR L'ETAT

PROBLEME 1 (10 points)

Soit n un entier naturel $n > 1$
On désigne par E_n l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficient réels.
On désigne par F_n le sous ensemble de E_n des matrices M telles que $M^2 = O_n$ et $M \neq O_n$

O_n désigne la matrice nulle de E_n

Les parties I et II du problème sont indépendantes.

Partie I : On suppose n = 2

1) Déterminer les matrices M appartenant à F_2

On posera $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et on déterminera les conditions sur les quatre nombres a, b, c, d pour que M appartienne à F_2

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Déterminer les matrices B éléments de F_2 tels que (A + B) soit un élément de F_2

Partie II : On suppose n = 3

Soit $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et soit A une matrice de F_3

1) Déterminer la dimension du sous espace vectoriel E_3' de E_3 engendré par les matrices A et I

2) Soit B = A + I

a) Montrer que B est inversible et que son inverse B^{-1} est un élément de E_3'

b) Pour tout entier k $(k > 0)$ montrer que B^k est un élément de E_3'

c) Exprimer $\sum_{k=1}^{k=p} B^k$ en fonction de p, A et I

3) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

a) Montrer que A est un élément de F_3

b) Soit B = A + I Calculer B^{-1}

PROBLEME 2 (10 points) **Les parties A et B sont indépendantes**

On considère deux urnes U et V. L'urne U contient **a** boules blanches et **b** boules noires. L'urne V contient **a** boules noires et **b** boules blanches.
Dans ce problème toutes les boules sont tirées une à une au hasard et avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient.
Le premier tirage s'effectue dans U.

On désigne pour tout entier n naturel non nul :
U_n l'évènement: " le nième tirage s'effectue dans U"
V_n l'évènement : "le nième tirage s'effectue dans V"
B_n l'évènement : " la nième boule tirée est blanche"
Remarque : l'événement U_1 est certain
Partie A

Dans cette partie, on adopte la règle suivante :
Pour tout entier n ($n \geq 1$) si la boule obtenue au nième tirage est blanche le (n+1)ième tirage s'effectue dans U sinon le (n+1) ième tirage s'effectue dans V.

1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche.
Déterminer la loi de la probabilité de X et calculer l'espérance et la variance de X
2) On désigne par P_n la probabilité de l'évènement B_n

a) Déterminer une relation entre P_n et P_{n+1}

b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n, a et b

c) Déterminer la limite de la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Partie B

Dans cette partie, on adopte la règle suivante :
Pour tout entier n ($n \geq 1$), si la boule obtenue au nième tirage est blanche, le (n + 1)ième tirage s'effectue dans la même urne, c'est à dire : le (n + 1)ième tirage s'effectue dans l'urne où a été tiré la nième boule.
Sinon on change d'urne, c'est à dire : le (n + 1)ième tirage s'effectue dans l'urne où ne s'est pas effectué le nième tirage.

1) Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche.
Déterminer la loi de la probabilité de Y

2) Pour tout entier n ($n \geq 2$) calculer la probabilité de l'évènement U_n

3) Calculer la probabilité de l'évènement B_n pour $n \geq 2$